ÉGALITÉS

I. AFFIRMATIONS

EXPRESSION/AFFIRMATION

Une **expression** est une phrase nominale, elle exprime un **objet mathématique** (nombre, point, ensemble, fonction…) Ce qu'elle exprime s'appelle sa **valeur**.

« $3+3\times2$ »	expression numérique.
« $3x-5$ »	expression littérale.

Une **affirmation** est une phrase verbale, qui est soit vraie, soit fausse. *Vrai* et *faux* sont les deux **valeurs de vérité** possibles d'une affirmation.

$2+2=4$	affirmation vraie
$2>3$	affirmation fausse
$x+1>10$	affirmation parfois vraie, parfois fausse.

OPÉRATION / RELATION / CONNECTEUR LOGIQUE

Dans une **opération**, on entre deux objets mathématiques (des nombres, par exemple) et il sort autre objet mathématique. Exemple : la multiplication. Lorsqu'on y entre les nombres 2 et 3, il sort le nombre 6.

Dans une **relation**, on entre deux objets mathématique et ça donne une affirmation et donc finalement, une valeur de vérité. Exemple : le signe <. Lorsqu'on y entre 2 et 3 (dans cet ordre), ça donne « $2<3$ », qui est *vrai*.

On place un **connecteur logique** entre deux affirmations, donc en fait on lui présente deux valeurs de vérité et cela produit une nouvelle affirmation, donc finalement une nouvelle valeur de vérité. Exemple : « et ». Si j'ai deux affirmations que je note par la lettre **P** et la lettre **Q**, je peux fabriquer la nouvelle affirmation : « **P** et **Q** ».

ÉQUIVALENCE LOGIQUE

Deux affirmations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. **P** est *équivalente* à **Q** se note : $\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$.

Par exemple, $ABCD$ étant un quadrilatère, affirmer que « $ABCD$ est un parallélogramme » revient à affirmer que « $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ». Si l'une des affirmations est vraie, l'autre est vraie aussi. Si l'une est fausse, l'autre est fausse aussi. Elles ont même *valeur de vérité*. Elles sont donc *équivalentes*.

IMPLICATION

Une **implication** est une affirmation de la forme « si… alors… ». **P** *implique* **Q** se note : $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ et signifie que **si** **P** est vrai, **alors**, **Q** est forcément vrai. (Mais si **P** n'est pas vraie, **Q** peut être indifféremment vraie ou fausse.)

Exemple : $x>3 \Rightarrow x>2$.

Une équivalence logique peut se décomposer en deux implications :

$\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ signifie : $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$ et $(\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P})$.

Transformation

> **Transformer** une affirmation, c'est la remplacer par une affirmation qui lui est équivalente.

II. Définitions

Égaler

Le signe « = » se lit « égale », du verbe *égaler*. Il peut aussi se lire « est égal à », mais c'est plus long. En tout cas, « $x + 1 = 3$ » n'a aucune raison de se lire « $x + 1$ est égal 3 » (avec le « est » mais sans le « à »).

Égalité

> Une **égalité** est une affirmation fondée sur le signe « = ». Les deux expressions placées de part et d'autre du « = » se nomment les **membres** de l'égalité.

Exemples

$2 = 2$ est une égalité vraie.

$2+2=3$ est une égalité fausse.

$a + b = b + a$ est une égalité toujours vraie. Une égalité toujours vraie se nomme une **identité**.

L'égalité $x^2 = x$, quant à elle, est certes souvent fausse, mais pas toujours.

III. Axiomes

Réflexivité

Toute chose est égale à elle-même. Autrement dit, quel que soit le nombre A, l'égalité $A = A$ est vraie.

Principe de substitution

Si deux choses sont égales, on peut substituer l'une à l'autre. Plus précisément, si $A = B$, on peut *transformer* une affirmation ou une expression contenant A en remplaçant A par B en n'importe quel endroit. (A et B peuvent être sous forme d'expressions.)

IV. Théorèmes

Symétrie

Si $A = B$ alors $B = A$.

Transitivité

Si $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

V. Transformation

Régles élémentaires

Pour *transformer* une égalité, on peut ajouter un même nombre à ses deux membres, ou encore multiplier ses deux membres par un même nombre (non nul). Autrement dit, quels que soient les réels A, B et α, on a :

$$A = B \Leftrightarrow A + \alpha = B + \alpha$$

Et si $\alpha \neq 0$: $$A = B \Leftrightarrow \alpha A = \alpha B$$

Corollaires

On peut aussi soustraire un même nombre aux deux membres, puisque soustraire, c'est ajouter l'opposé.

On peut prendre l'opposé des deux membres, puisque pour prendre l'opposé on peut multiplier par -1.

On peut diviser les deux membres par un même nombre non nul, puisque diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Produit en croix

Quels que soient les réels a, b, c et d (avec b et d non nuls) : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Démonstration : nous verrons cela en exercice.

VI. Équations

Définitions

Une **équation** est une égalité contenant <u>une</u> variable.

Une **solution** d'une équation est une valeur de la variable qui vérifie l'égalité.

Résoudre une équation, c'est déterminer l'<u>ensemble</u> de ses solutions.

Commentaire

Au collège, on donne à la fin la ou les solutions de l'équation. Au lycée, on donnera de préférence ces solutions « en paquet », dans un ensemble. Au lieu de dire « l'équation admet deux solutions : -1 et 7 », on dira plutôt : « l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{-1;7\}$ ».

L'ensemble des solutions peut être un singleton ou même, lorsque l'équation n'a pas de solution, l'ensemble vide.

Degré d'une équation (définition)

Lorsqu'on fait passer tous les termes du même côté et qu'on met l'équation sous la forme $P(x)=0$, si $P(x)$ est un polynôme, alors le **degré** de l'équation est le *degré* de ce polynôme.

Méthodes de résolution

Tout dépend du *degré* de l'équation :

Équations du premier degré

Si l'équation est du premier degré, on applique les règles élémentaires de transformation de façon à isoler l'inconnue.

Équations du second degré

Si l'équation est de degré 2 (ou plus), alors, on fait tout « passer du même côté » et l'on factorise.

Puis on applique le théorème suivant :

Produit nul

Un produit est nul si, et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs s'annule : $AB = 0 \iff (A=0 \text{ ou } B=0)$

« Valeurs interdites »

Il y a des équations qui, pour certaines valeurs de leurs variables, n'ont pas de sens. Par exemple $\frac{1}{x} = 2 - x$ n'a pas de sens lorsque x vaut 0.parce qu'on ne peut diviser par zéro. On les appelle en général des **« valeurs interdites »**.

VII. Exprimer en fonction de...

Définition

Exprimer x **en fonction de** y et z, c'est exprimer x à partir de y et z. C'est exprimer x par une formule ne contenant pas d'autre variable que y et z.

Cela peut donner par exemple quelque chose comme : $x = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{3} + 2yz$.

VIII. Systèmes

Système d'équations

Un **système** de deux équations à deux inconnues est une affirmation formée de deux égalités reliées par un « et » (qu'on représente par une accolade) et qui contiennent deux variables, chacune (les mêmes dans les deux égalités), en général notées x et y.
Un *couple* de réels $(a\,;\,b)$ est une **solution** du système lorsqu'en donnant à x la valeur de son premier terme et à y la valeur du second, le système est vérifié.
Résoudre un système, c'est trouver toutes ses solutions (ou l'ensemble de ses solutions).

Exemple

$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ est un système de deux équation à deux inconnues.

$(2;5)$ est une solution (la seule, d'ailleurs) de ce système, car, lorsqu'on remplace x par 2 et y par 5, le système s'écrit : $\begin{cases} 3\times 2 + 4\times 5 = 26 \\ 2 + 2\times 5 = 12 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 26 = 26 \\ 12 = 12 \end{cases}$ c'est-à-dire à l'affirmation : « 26=26 et 12=12 », qui est vraie.

Résolution

Pour résoudre un système du premier degré (sans x^2 ni y^2, ni xy…), on essaye (comme pour une équation) de le *transformer* progressivement, de façon à le rendre de plus en plus simple. Le but étant d'éliminer une inconnue dans l'une des deux équations. Nous verrons tout cela en exercice. Retenons qu'il vaut mieux procéder par équivalences et qu'on peut utiliser le corollaire du théorème suivant.

THÉORÈME

On peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser membre à membre deux égalités :

Si $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ alors :

- $A + C = B + D$
- $A - C = B - D$
- $AC = BD$

Si, de plus $C \neq 0$ et $D \neq 0$, alors : $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{D}$

COROLLAIRE

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C + A = D + B \end{cases}$$

On peut, dans un système, remplacer l'une des égalités par la somme (ou la différence) membre à membre, des deux égalités. On obtient ainsi un système *équivalent* au précédent.